第 5 講　漸化式と数学的帰納法

PART1 漸化式

要点 ① 漸化式

$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1$ で定義される数列を考える。

$a_1=$

$a_2=3a_1+1=3\cdot\quad+1=4$

$a_3=3a_2+1=3\cdot\quad+1=13$

$a_4=3a_3+1=3\cdot\quad+1=40$

これを繰り返すと，数列の項が順に求められ，すべての項がただ 1 通りに定まる。

このように，数列 $\{a_n\}$ の初項，または初項からいくつかの項と，前の項から次の項をただ 1 通りに定める規則を与えることで，この数列のすべての項を順に定義することができる。これを「帰納的定義」という。

上の例においては，式 $a_{n+1}=3a_n+1$ によって規則が定められる。このように，前の項から次の項をただ 1 通りに定める関係式を「　　　」という。

※以降，断りのない限り，漸化式は $n=1$，2，3，……で成り立つものとする。

【MEMO】

1 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の初項から第 5 項までを求めよ。

(1) $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n-2$　　(2) $a_1=3$, $a_{n+1}=3a_n-2n$

Point Pickup

漸化式を用いて項を順に求める

前の項から次の項をただ 1 通りに定める関係式を「漸化式」という。

この漸化式と，初項(または初項からいくつかの項)によって，この数列のすべての項を順に求めることができる。

第 5 講　PART1 確認問題

1　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+3$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ において，

$a_2=$ [ア]，$a_3=$ [イ]，$a_4=$ [ウエ]

である。

2　$a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n-n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ において，

$a_2=$ [オ]，$a_3=$ [カ]，$a_4=$ [キク]

である。

第 5 講　漸化式と数学的帰納法

PART1 漸化式

1 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の初項から第5項までを求めよ。

(1) $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n-2$　　(2) $a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-2n$

[解答]

(1) $a_1=2$

$a_2=a_1-2=2-2=0$

$a_3=a_2-2=0-2=-2$

$a_4=a_3-2=-2-2=-4$

$a_5=a_4-2=-4-2=-6$

(2) $a_1=3$

$a_2=3a_1-2\cdot1=3\cdot3-2=7$

$a_3=3a_2-2\cdot2=3\cdot7-4=17$

$a_4=3a_3-2\cdot3=3\cdot17-6=45$

$a_5=3a_4-2\cdot4=3\cdot45-8=127$

第 5 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：7，ウエ：10

[解説]

$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+3$

$a_2=a_1+3$ [A]

$=1+3=\mathbf{4}$

$a_3=a_2+3$

$=4+3=\mathbf{7}$

$a_4=a_3+3$

$=7+3=\mathbf{10}$

[A]　漸化式に $n=1$，2，3 を順に代入する。

2

[正解] オ：5，カ：8，キク：13

[解説]

$a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n-n$

$a_2=2a_1-1$ [B]

$=2\cdot3-1$

$=\mathbf{5}$

$a_3=2a_2-2$

$=2\cdot5-2$

$=\mathbf{8}$

$a_4=2a_3-3$

$=2\cdot8-3$

$=\mathbf{13}$

[B]　漸化式に $n=1$，2，3 を順に代入する。